H20　日比谷　都立　数学　問題

数-08-都-日比谷-問-01

1　次の各問に答えよ。

問１　$x=5+\sqrt{3}$，$y=3+\sqrt{5}$ のとき，$x(y-2)+x(y-4)-5(y-2)-5(y-4)$　の式の値を求めよ。

問２　$(2a-b)^2-2\left(\dfrac{a}{2}-b\right)(a-2b)$　を因数分解せよ。

問３　n を２以下の整数とする。

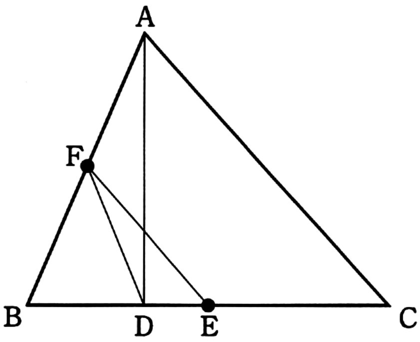
関数 $y=x^2$ の x の変域が $n \leqq x < 3$ のとき，y の変域が $0 \leqq y < 9$ となる n の値をすべて求めよ。

問４　右の図で，△ABC は３つの内角がすべて鋭角で，AB＜AC の三角形である。

頂点Ａから辺 BC に垂線をひき，辺 BC との交点をD，辺ＢC，辺 AB の中点をそれぞれ E，Ｆとする。

点Ｄと点 F，点Ｅと点Ｆをそれぞれ結ぶ。

∠DFE＝19°，∠ACB＝48°のとき，∠DAF の大きさは何度か。



問５　１から６までの目の出る大小１つずつのさいころを同時に投げる。大きいさいころの出た目の数を a，小さいさいころの出た目の数を b とする。

$2a+b$ が素数となる確率を求めよ。

ただし，さいころの１から６までの目の出る確率はすべて等しいものとする。

2 右の**図1**で，点Oは原点，曲線ℓは関数$y=\frac{1}{4}x^2$のグラフ，直線mは変化の割合が正の数である1次関数のグラフを表している。

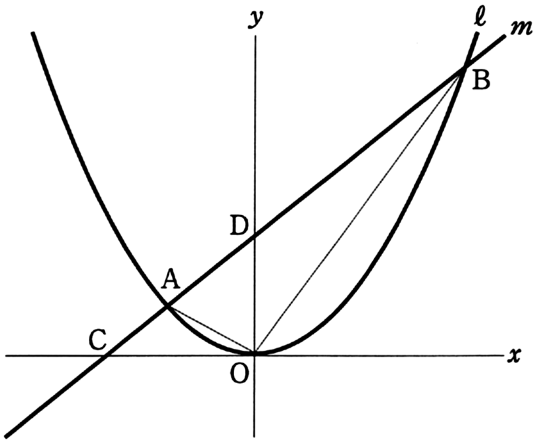
曲線ℓと直線mは2点A，Bで交わっており，点Aのx座標は負の数であり，点Bのx座標は正の数である。

直線mとx軸，y軸との交点をそれぞれC，Dとする。

原点Oと点A，原点Oと点Bをそれぞれ結ぶ。

原点Oから点(1，0)までの距離，および原点Oから点(0，1)までの距離をそれぞれ1cmとして，次の各問に答えよ。

図1



問1 正の数tを用いて，点Bのx座標を$\sqrt{t}$とする。線分OBの長さが$\frac{\sqrt{33}}{2}$cmのとき，tの値を求めよ。

問2 **図1**において，∠AOC=30°，OA＝ODの場合を考える。線分CDの長さは何cmか。

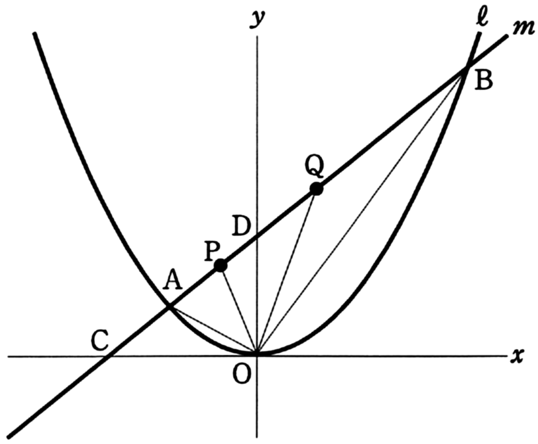
問3 右の**図2**は，**図1**において，2点A，Bのx座標がそれぞれ-3，9であり，線分AB上に点A，点Bと異なる2点P，Qをとり，正の数kを用いて，2点P，Qのx座標をそれぞれ$-\frac{2}{3}k$，$2k$とした場合を表している。

原点Oと点P，原点Oと点Qをそれぞれ結ぶ。

△OAPの面積は，△OBQの面積の何分のいくつか。

ただし，解答欄には，答えだけではなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

図2

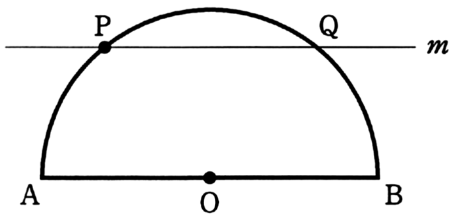


3 右の**図1**で，点Oは線分ABを直径とする半円の中心である。$\overset{\frown}{AB}$上に点Pをとり，点Pは点A，点Bのいずれにも一致せず，$\overset{\frown}{AP}$の長さは$\overset{\frown}{BP}$の長さより短いものとする。

点Pを通り，線分ABに平行な直線mをひき，直線mと半円の交点のうち点Pと異なる点をQとする。

次の各問に答えよ。

図1

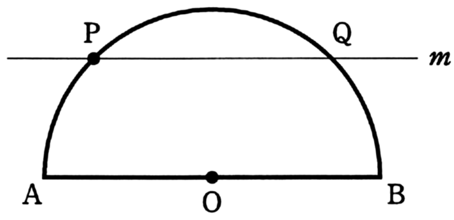


問1 右の**図2**は，**図1**において，$\overset{\frown}{PQ}$の長さが，$\overset{\frown}{AP}$の長さの2倍である場合を表している。

解答欄に示した図をもとにして，定規とコンパスを用いて，直線mを作図せよ。

ただし，作図に用いた線は消さないでおくこと。

図2



問2 右の**図3**は，**図1**において，点Aを通り線分ABに垂直な直線ℓを線分ABの上側にひき，点Bと点Pを結んでできる線分BPを点Pの方向に延長した直線と直線ℓとの交点をC，点Bと点Qを結んでできる線分BQを点Qの方向に延長した直線と直線ℓとの交点をDとした場合を表している。

次の**(1)**，**(2)**に答えよ。

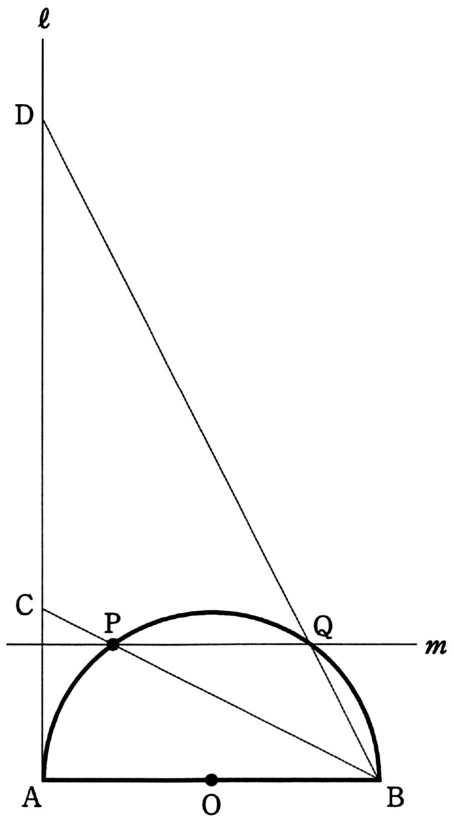
(1) $\triangle PBQ \backsim \triangle DBC$であることを証明せよ。

(2) **図3**において，点Pから線分ABに垂線をひき，線分ABとの交点をHとした場合を考える。

$\overset{\frown}{AB}$の長さが10π cm，線分PHの長さが8 cmのとき，線分BPの長さと線分BDの長さをもっとも簡単な整数の比で表せ。

ただし，円周率はπとする。

図3



4 右の図に示した立体 A－BCD は，1 辺の長さが 60 cm の正四面体である。

点 P は，頂点 A を出発し，毎秒 5 cm の速さで辺 AB 上を頂点 A から頂点 B まで動き，頂点 B に到着後折り返して頂点 A まで同じ速さで動き，24 秒後に頂点 A で止まる。

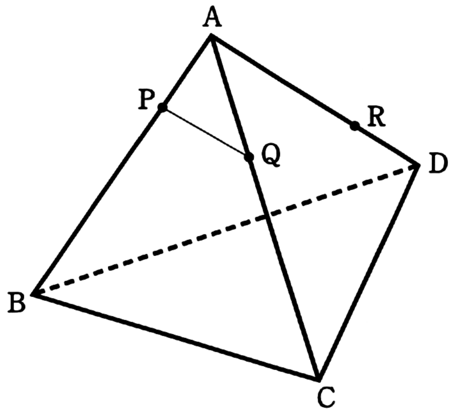
点 Q は，頂点 A を出発し，毎秒 6 cm の速さで辺 AC 上を頂点 A から頂点 C まで動き，頂点 C に到着後折り返して頂点 A まで同じ速さで動き，20 秒後に頂点 A で止まる。

点 R は辺 AD 上にある点で，AR：RD＝2：1 である。

2 点 P，Q が頂点 A を同時に出発してからの時間を t 秒とする。

点 P と点 Q を結ぶ。

次の各問に答えよ。



問１ 2 点 P, Q が頂点 A を同時に出発してから初めて AP＝AR となるとき，線分 PQ の長さは何 cm か。

問２ $0 < t < 20$ のとき，線分 PQ と線分 BC が平行となるときの t の値を求めよ。

問３ $12 < t < 20$ のとき，点 P と点 R，点 Q と点 R をそれぞれ結んだ場合を考える。

立体 A－PQR の体積が立体 A－BCD の体積の $\frac{1}{3}$ となるときの t の値を求めよ。

ただし，解答欄には，答えだけではなく，答えを求める過程が分かるように，途中の式や計算なども書け。

H20　日比谷　都立　数学　解答用紙

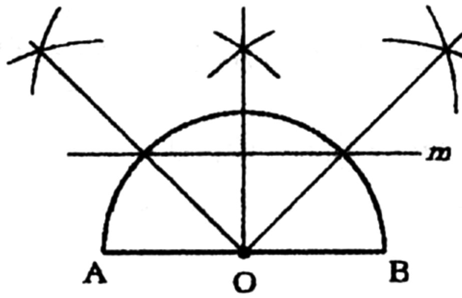
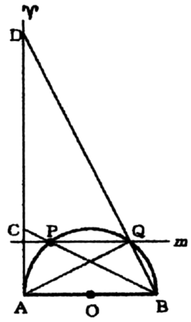
	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-08-都-日比谷-KY-01	1	問1			
		問2			
		問3			
		問4	度		
		問5			
数-08-都-日比谷-KY-02	2	問1	$t=$		
		問2	cm		
		問3	【途中の式や計算など】 (答え)		

	問題番号			解　　答	配点	備　　考
数-08-都-日比谷-KY-03	3	問１				
		問２	(1)	【証　明】 △PBQ∽△DBC		
			(2)	BP：BD＝　　　　：		

数-08-都-日比谷-Ky-04	問題番号		解　　答	配点	備　　考
	4	問1	cm		
		問2	$t=$		
		問3	【途中の式や計算など】 (答え)　$t=$		

H20　日比谷　都立　数学　解答

	問題番号		解　答	配点	備　考
数-08-都-日比谷-K01	**1**	問1	$2\sqrt{15}$	5	
		問2	$3(a+b)(a-b)$	5	
		問3	$n=-2,\ -1,\ 0$	5	
		問4	23　度	5	
		問5	$\dfrac{13}{36}$	5	
数-08-都-日比谷-K02	**2**	問1	$t=6$	7	
		問2	$\dfrac{16}{3}$ cm	8	
		問3 解答例	2 点 A，B は曲線 ℓ 上の点であるから，その座標は， $A\left(-3,\ \dfrac{9}{4}\right)$，$B\left(9,\ \dfrac{81}{4}\right)$である。直線 m を $y=ax+b$ とおくと，この 2 点は，直線 m 上の点でもあるから， $-3a+b=\dfrac{9}{4}$ …①，$9a+b=\dfrac{81}{4}$ …②となる。 ①，②を連立させて解くと，　$a=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{27}{4}$ △OAP，△OAD，△OPD の面積をそれぞれ S，U，X とおくと， $U=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{27}{4}\times3=\dfrac{81}{8}$，$X=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{27}{4}\times\dfrac{2}{3}k=\dfrac{9}{4}k$， $S=U-X=\dfrac{81}{8}-\dfrac{9}{4}k=\dfrac{9}{8}(9-2k)$ △OBQ，△OBD，△OQD の面積をそれぞれ T，W，Y とおくと， $W=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{27}{4}\times9=\dfrac{243}{8}$，$Y=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{27}{4}\times2k=\dfrac{27}{4}k$， $T=W-Y=\dfrac{243}{8}-\dfrac{27}{4}k=\dfrac{27}{8}(9-2k)$ $S=\dfrac{1}{3}T$ より，△OAP の面積は△OBQ の面積の $\dfrac{1}{3}$ である。 (答え)　$\dfrac{1}{3}$	10	

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">問題番号</th><th colspan="2">解　　答</th><th>配点</th><th>備　　考</th></tr>
<tr><td rowspan="3">数-08-都-日比谷-K 03</td><td rowspan="3">3</td><td>問１
解答例</td><td colspan="2">
</td><td>7</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">問２</td><td>(1)
解答例</td><td>点Aと点Qを結ぶ。


∠AQBは直径ABに対する円周角により，
∠AQB＝90°…①
線分 AB と直線ℓは垂直であるから，
∠BAC＝90°…②
∠PQAと∠PBAはともに$\overset{\frown}{PA}$に対する円周角であるから，
∠PQA＝∠PBA…③
∠PQB＝∠PQA＋∠AQB…④
∠DCB＋∠ACB＝180°…⑤
∠PBA＋∠BAC＋∠ACB＝180°…⑥
⑤，⑥により，∠DCB＝∠PBA＋∠BAC　…⑦
△PBQと△DBCにおいて，
①，②，③，④，⑦により，
∠PQB＝∠DCB　…⑧
また，共通の角だから，∠PBQ=∠DBC　…⑨
⑧，⑨により，2組の角がそれぞれ等しいので，
△PBQ∽△DBC</td><td>10</td><td></td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>BP：BD＝2：5</td><td>8</td><td></td></tr>
</table>

	問題番号		解　　答	配点	備　　考
数-08-都-日比谷-K-04	4	問1	$8\sqrt{31}$　cm	7	
		問2	$t=\dfrac{120}{11}$	7	
		問3 解答例	点Bと点R，点Cと点Rをそれぞれ結ぶ。 頂点Dから△ABCにひいた垂線と△ABCとの交点をH，頂点Rから△ABCにひいた垂線と△ABCとの交点をK，立体D－ABCの体積をV，立体R－ABCの体積をW，立体R－APQの体積をUとすると， AD：AR＝DH：RK＝3：2 立体D－ABCと立体R－ABCは底面ABCが共通なので， V：W＝3：2 よって，　V：U＝3：1より，W：U＝2：1である。 立体R－ABCと立体R－APQは高さRKが共通なので，△ABCの面積をS，△APQの面積をTとすれば， W：U＝2：1よりS：T＝2：1…① △ABCは正三角形なので，頂点Aから辺BCに垂線をひき辺BCとの交点をLとすると，AL：BL＝$\sqrt{3}$：1 したがって，　AL＝$30\sqrt{3}$，S＝$\dfrac{1}{2}\times60\times30\sqrt{3}$ ＝$900\sqrt{3}$ $12<t<20$より，点Pは頂点Bから頂点Aに，点Qは頂点Cから頂点Aに向かっているので，AP＝$120-5t$，AQ＝$120-6t$ 点Qから辺ABに垂線をひき，辺ABとの交点をEとする。 △ABCは正三角形なので，AQ：QE＝2：$\sqrt{3}$　より， QE＝$(120-6t)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$， T＝$\dfrac{1}{2}\times(120-5t)(120-6t)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ①より2T＝Sであるから， $2\times\dfrac{1}{2}\times(120-5t)(120-6t)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=900\sqrt{3}$ $t^2-44t+420=0$，$(t-14)(t-30)=0$，$12<t<20$より $t=14$ （答え）　$t=14$	11	

H20　日比谷　都立　数学　解説

数-08-都-日比谷-KS-01

1　**問2**　$(2a-b)^2-2\left(\frac{a}{2}-b\right)(a-2b)=(2a-b)^2-(a-2b)(a-2b)=(2a-b)^2-(a-2b)^2$　$2a-b=A$，$a-2b=B$とおくと，式は，$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$　元にもどして，
$\{(2a-b)+(a-2b)\}\{(2a-b)-(a-2b)\}=(3a-3b)(a+b)=3(a+b)(a-b)$

問3　$y=x^2$において，$0\leqq y<9$だから，$y=0$となる$x=0$より，xの変域に必ず0が含まれる。また，$y=9$となるのは，$x=\pm3$のときで，$y=9$は変域に含まれないので，$-3<x<3$　条件より，$n\leqq x<3$（nは2以下の整数）であるから，nは0以下-3未満の整数となる。よって，$n=-2$，-1，0

問4　△ABCにおいて，BF＝FA，BE＝ECだから，中点連結定理より，FE // AC　FEとADの交点をPとすると，∠APF＝∠CAD＝90°－48°＝42°　△PFDにおいて，三角形の内角と外角の性質より，∠PDF＝42°－19°＝23°　ここで，FからBCに垂線FHをひくと，FH // ADより，BH：HD＝BF：FA＝1：1　よって，BH＝DHより，△FBDはFB＝FDの二等辺三角形である。FB＝FAより，FD＝FAだから，△FDAにおいて，∠DAF＝∠ADF＝∠PDF＝23°

問5　さいころの目の出方は全部で，6×6＝36（通り）　$2a+b$が素数になるa，bの組み合わせを（a，b）で表すと，(1，1)，(1，3)，(1，5)，(2，1)，(2，3)，(3，1)，(3，5)，(4，3)，(4，5)，(5，1)，(5，3)，(6，1)，(6，5)の13通り。よって，求める確率は，$\frac{13}{36}$

数-08-都-日比谷-KS-02

2　**問1**　点Bは$y=\frac{1}{4}x^2$上の点より，$x=\sqrt{t}$を代入して，$y=\frac{1}{4}\times(\sqrt{t})^2=\frac{t}{4}$　三平方の定理を利用して，$\mathrm{OB}^2=(\sqrt{t})^2+\left(\frac{t}{4}\right)^2=\frac{t^2}{16}+t$　$\mathrm{OB}=\frac{\sqrt{33}}{2}$より，$\mathrm{OB}^2=\frac{33}{4}$　よって，$\frac{t^2}{16}+t=\frac{33}{4}$　整理して，$t^2+16t-132=0$　$(t+22)(t-6)=0$　$t>0$より，$t=6$

問2　∠AOD＝90°－∠COA＝90°－30°＝60°　OA＝ODより，△OADは正三角形で，∠ODA＝60°　よって，△CODにおいて，CD＝2OD＝2OA　また，CA＝OAとなるから，AからCOに垂線AHをひくと，△AHOで，AH：OH＝1：$\sqrt{3}$　AH＝s（$s>0$）とおくと，OH＝$\sqrt{3}s$
A$(-\sqrt{3}s,\ s)$とおける。点Aは$y=\frac{1}{4}x^2$上の点より，$s=\frac{1}{4}\times(-\sqrt{3}s)^2$　$s=\frac{3}{4}s^2$　$3s^2-4s=0$
$s(3s-4)=0$　$s>0$より，$s=\frac{4}{3}$　よって，$\mathrm{OA}=2\mathrm{AH}=2\times\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$　$\mathrm{CD}=2\mathrm{OA}=2\times\frac{8}{3}=\frac{16}{3}$（cm）

数-08-都-日比谷-KS-03

3　**問1**　弧PQ＝2弧APより，∠POQ＝2∠AOP　また，弧AP＝弧QBより，∠AOP＝∠BOQ　よって，まず，ABの垂直二等分線OXをかく。∠AOX，∠BOXの二等分線をかき，円周との交点をそれぞれP，Qとする。直線PQが求める直線mである。

問2　**(2)**　OA＝r cmとする。$2\pi r\times\frac{1}{2}=10\pi$より，$r=10$　よって，OP＝10，PH＝8より，OH＝$\sqrt{10^2-8^2}=6$　△BCAでPH // CAより，PH：CA＝BH：BA　8：CA＝16：20　CA＝10　よって，△ABCで三平方の定理より，BC＝$\sqrt{10^2+20^2}=10\sqrt{5}$　また，△PAHでAH＝10－6＝4より，AP＝$\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$　BQ＝AP＝$4\sqrt{5}$　したがって，BP：BD＝BQ：BC＝$4\sqrt{5}$：$10\sqrt{5}$＝2：5

数-08-都-日比谷-KS-04

4　**問1**　初めてAP＝ARとなるとき，$0\leqq t\leqq12$で，AP＝$5t$　AR＝$\frac{2}{3}\times60=40$より，$5t=40$
$t=8$（秒後）　このとき，AQ＝6×8＝48　QからAPに垂線QHをひくと，∠QAH＝60°だから，AH＝$\frac{1}{2}$AQ＝$\frac{1}{2}\times48=24$，QH＝$\sqrt{3}$AH＝$24\sqrt{3}$　よって，△QPHで三平方の定理より，PQ＝$\sqrt{(40-24)^2+(24\sqrt{3})^2}=8\sqrt{31}$（cm）

問2　$0<t<20$のとき，PQ // BCとなるのは，PよりQの方が進むのが早いので，Qが折り返した後となる。このとき，AP＝$5t$，AQ＝$120-6t$　平行線と線分の比の定理より，AP：AB＝AQ：AC
$5t$：60＝$120-6t$：60　$5t=120-6t$　$11t=120$　$t=\frac{120}{11}$